

MODELO MATEMÁTICO DE MOTORES DE CORRENTE CONTÍNUA

Introdução

O dínamo de corrente contínua básico, consistindo de uma armadura, escovas e enrolamentos de campo em série, em paralelo, ou a combinação de ambos, vem sendo usado por muitos anos como um conversor básico da energia. Tais motores são usados como motores principais em aplicações como: laminadores, elevadores elétricos, guindastes, veículos elétricos e algumas bombas onde são necessárias velocidades variáveis. O motor de corrente contínua, junto com um sistema amplificador de corrente contínua apropriado e um controle realimentado em posição ou velocidade, fornece o elemento de potência em muitas aplicações de guiagem e controle. Os avanços recentes na arte de materiais magnéticos e na amplificação a estado sólido popularizaram o motor a ímã-permanente como elemento de acionamento de muitos sistemas de controle em malha fechada. O projeto e a compensação apropriados de tais sistemas requerem um modelo matemático adequado para todos os componentes do sistema. Nesta apostila, desenvolvemos um modelo linear para um motor de corrente contínua separadamente excitado e para um motor a ímã-permanente. O modelo eletromecânico para o motor trata a *tensão de armadura* de entrada e o *torque da carga* como variáveis de entrada e a velocidade ou a posição do eixo como variáveis de saída. O modelo térmico do motor trata a potência de entrada ou a dissipação de potência como uma entrada variável e o acréscimo de temperatura no dispositivo como a variável de saída.

Modelo Eletromecânico

Os componentes significativos de um motor de corrente contínua excitado separadamente são modelados como mostra a Fig. 1. A armadura é modelada como tendo uma resistência constante R_a em série com uma indutância constante L_a , representando a indutância do enrolamento da armadura, e uma fonte de tensão v_g representando a tensão gerada na armadura. O enrolamento de campo é representado por uma resistência constante R_f e uma indutância constante L_f , com o fluxo de campo líquido de entreferro sendo designado por ϕ . A velocidade do eixo de armadura é representada por ω e o torque gerado, torque de atrito do motor, torque de inércia do motor, e o torque da carga (no eixo do motor) é indicado por T_g, T_f, T_J e T_L , respectivamente.

A primeira de uma série de equações básicas que modelam o motor de corrente contínua é obtida escrevendo uma equação de tensão na malha da armadura.

$$v_i(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + v_g(t). \quad (1)$$

O termo de tensão $v_g(t)$ na Eq. (1) é uma tensão gerada, que resulta quando os condutores da armadura se movem através do fluxo de campo estabelecido pela corrente de campo i_f . De acordo com Faraday, uma tensão é induzida nos terminais de uma espira condutora que gira imersa num campo magnético constante. Essa tensão é dada por

$$v(t) = \frac{d\lambda(t)}{dt}, \quad (2)$$

onde $\lambda(t)$ representa o *fluxo magnético concatenado* pela espira e t , é o tempo. Em uma máquina rotativa com comutador, cada trajeto fechado de condutor do rotor tem, nos seus terminais, uma tensão dada pela Eq. (2) acima, onde $d\lambda(t)/dt$ é proporcional ao fluxo magnético no entreferro de ar e a velocidade angular $\omega(t)$, ou

$$v_g(t) = K\phi(t)\omega(t). \quad (3)$$

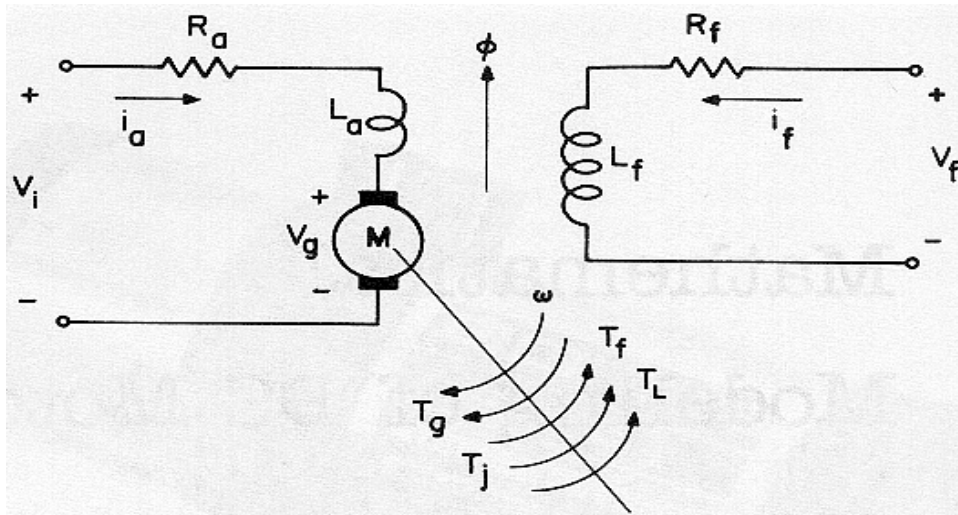


Fig. 1. Modelo de um motor de corrente contínua excitado separadamente.

Finalmente, supondo a corrente de campo como sendo constante e ignorando as mudanças no fluxo de campo devido à reação da armadura e outros efeitos secundários, o fluxo de campo torna-se constante, e a Eq. (3) torna-se

$$v_g(t) = K_e\omega(t). \quad (4)$$

Uma força é exercida nos condutores onde flui corrente, no rotor, na presença de fluxo de campo perpendicular a espira do condutor. O valor desta força é proporcional ao valor da corrente nos condutores, da intensidade do campo magnético, e do comprimento dos condutores. Cada um dos condutores no campo magnético contribui com um componente da força total, e esse vetor de força multiplicado pelo raio, determinado pela construção do rotor, produz o torque eletromagnético líquido desenvolvido pelo motor, que, supondo que o fluxo de campo permaneça constante, é proporcional à corrente da armadura,

$$T_g(t) = K_t i_a(t), \quad (5)$$

onde K_t é a constante do torque do motor.

A potência mecânica desenvolvida no rotor é o produto do torque e da velocidade angular desenvolvidos

$$P_g(t) = T_g(t)\omega(t). \quad (6)$$

Naturalmente, nem toda a potência mecânica desenvolvida no rotor é entregue à carga mecânica conectada ao eixo. Parte da potência desenvolvida é perdida através da resistência do enrolamento do rotor e atrito e por histerese e perdas por correntes de Foucault no ferro do rotor, daqui por diante chamadas de *perdas por atrito*, e parte da energia desenvolvida é armazenada como energia cinética na massa girante do rotor. O torque necessário para superar as perdas por atrito é designado por $T_f(t)$ e o torque necessário para acelerar a inércia é $T_j(t)$. Em todo instante de tempo, o torque desenvolvido deve ser igual e oposto à soma dos torques necessários para superar o atrito, a inércia, e o torque da carga. Assim,

$$T_g(t) = T_f(t) + T_L(t) + J \frac{d\omega(t)}{dt}, \quad (7)$$

onde o torque inercial é representado pelo produto do momento da inércia J e a aceleração angular $d\omega(t)/dt$, e J é o momento de inércia total do rotor e da carga em relação ao eixo do motor. O componente do torque total de atrito do eixo do motor que é uma função linear da velocidade angular do rotor é chamado componente *viscoso* do atrito ou componente de *amortecimento viscoso* e é, geralmente, separado de todos os outros termos restantes do atrito, como mostra a seguinte equação:

$$T_g(t) = T_f(t) + T_L(t) + J \frac{d\omega(t)}{dt} + B\omega(t), \quad (8)$$

onde B é o coeficiente de atrito viscoso que representa todo o atrito viscoso do motor e da carga em relação ao eixo do motor, e $T_f(t)$ é a soma de todo atrito do motor e da carga, arrasto de enrolamento, e de termos de perda no ferro em relação ao eixo do motor, excluindo o atrito viscoso. As equações (1), (4), (5), e (8) constituem um conjunto básico de equações que modelam o motor C.C. e a partir das quais são obtidas as *funções de transferência* para o motor C.C. operando em vários modos. Tomando a *transformada de Laplace* de ambos os lados do conjunto básico de equações e rearranjando-as, tem-se

$$V_i(s) - V_g(s) = (R_a + sL_a)I_a(s), \quad (9)$$

$$V_g(s) = K_e\Omega(s), \quad (10)$$

$$T_g(s) = K_t I_a(s), \quad (11)$$

$$T_g(s) - T_f(s) - T_L(s) = (B + sJ)\Omega(s). \quad (12)$$

A representação destas equações básicas em diagrama de blocos é mostrada na Fig. 2.

Antes de continuar com a função de transferência para o motor C.C., é apropriado dar uma pausa para diversas observações. Primeiramente, vamos supor que a tensão aplicada ao circuito da armadura do motor é *constante* e que o motor atingiu um ponto de operação em *regime permanente* com uma carga *constante* aplicada. A potência mecânica desenvolvida pelo rotor é dada pela versão constante em regime permanente da Eq. (6) e, considerando a Eq. (5), tem-se

$$P_g = T_g \omega = K_t I_a \omega, \quad (13)$$

onde todos os elementos da equação (13) são constantes devido à condição de regime permanente. A potência elétrica absorvida pela armadura é o produto da tensão pela corrente de armadura. Assim,

$$P_g = V_g I_a = K_e \omega I_a. \quad (14)$$

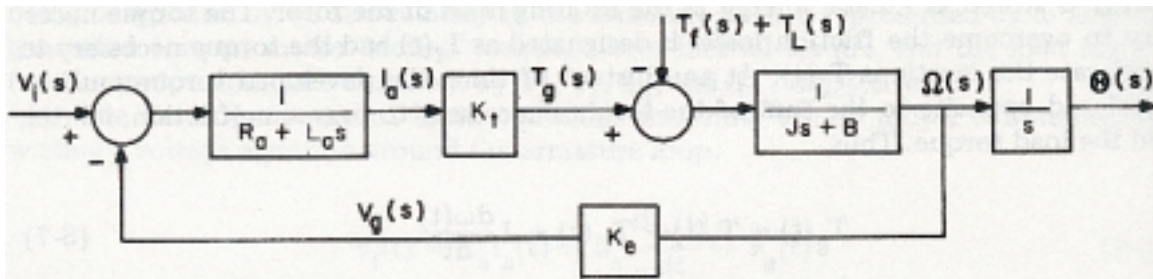


Fig. 2 - Diagrama de blocos de um modelo de motor C.C.

Então, uma vez que a potência mecânica desenvolvida deve ser igual a potência elétrica absorvida no rotor, no sistema de MKS, $K_t = K_e$.

Até o momento é aparente que o conjunto de equações básicas não contem nenhuma referência à corrente de campo nem aos parâmetros da bobina de campo (resistência e indutância). A suposição de fluxo constante de campo é uma consequência direta da suposição da corrente de campo constante; assim, o modelo a ser derivado deste conjunto básico também representa um motor a ímã-permanente, onde o fluxo de campo é constante em virtude da estrutura do campo do ímã-permanente.

Funções de transferência para o motor C.C.

O diagrama de blocos da Fig. 2 representa um sistema de duas entradas com a saída sendo a velocidade angular ω ou a posição angular θ , ou ambas. Da Fig. 2 a velocidade de saída do sistema é escrita como

$$\Omega(s) = G_1(s)V_i(s) + G_2(s)[T_f(s) + T_L(s)], \quad (15)$$

onde

$$G_1(s) = \frac{\Omega(s)}{V_i(s)} \Big|_{T_f(s)+T_L(s)=0} \quad (16)$$

e

$$G_2(s) = \frac{\Omega(s)}{T_f(s)+T_L(s)} \Big|_{V_i(s)=0} \quad (17)$$

A função de transferência tensão-velocidade $G_1(s)$ é

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \frac{\Omega(s)}{V_i(s)} = \frac{K_t}{(L_a s + R_a)(Js + B) + K_t K_e} \\ &= \frac{K_m}{\alpha s^2 + \beta s + 1}, \end{aligned} \quad (18)$$

onde

$$\begin{aligned} K_m &= \frac{K_t}{R_a B + K_t K_e}, \\ \alpha &= \frac{L_a J}{R_a B + K_t K_e}, \\ \beta &= \frac{R_a J + L_a B}{R_a B + K_t K_e}. \end{aligned}$$

A Eq. (18) define a função de transferência de segunda ordem para a tensão para o motor C.C. considerando que T_f e T_L são nulos. A Eq. (18) também pode ser expressa como

$$G_1(s) = \frac{K_t}{R_a B(1 + \tau_e s)(1 + \tau_m s) + K_t K_e},$$

onde

$$\begin{aligned} \tau_e &= L_a / R_a = \text{constante de tempo elétrica e} \\ \tau_m &= J / B = \text{constante de tempo mecânica.} \end{aligned}$$

Se a indutância de armadura é muito pequena, a constante de tempo elétrica pode ser desprezada frente a constante de tempo mecânica e a eq. (18) torna-se

$$\begin{aligned} G_v(s) &= \frac{\Omega(s)}{V_i(s)} = \frac{K_t}{R_a (Js + B) + K_t K_e} \\ &= \frac{K_m}{\tau s + 1}, \end{aligned} \quad (19)$$

onde

$$\tau = \frac{R_a J}{R_a B + K_t K_e}.$$

Na Eq. (19) a constante K_m é chamada de *constante do motor*.

A função de transferência para o torque da carga $G_2(s)$ é dada por

$$\begin{aligned} G_2(s) &= \frac{\Omega(s)}{T_f(s) + T_L(s)} = \frac{-\frac{1}{Js + B}}{1 + \frac{K_t K_e}{(L_a s + R_a)(Js + B)}} \\ &= \frac{-\frac{R_a}{K_t} K_m \left(\frac{L_a}{R_a} s + 1 \right)}{\alpha s^2 + \beta s + 1}, \end{aligned} \quad (20)$$

a qual, se a indutância de armadura é desprezível, reduz-se a

$$G_L(s) = \frac{\Omega(s)}{T_f(s) + T_L(s)} = \frac{-\frac{R_a}{K_t} K_m}{\tau s + 1}. \quad (21)$$

Exemplos de funções de transferência

Um pequeno motor DC (exemplo típico, Electro-Craft Modelo E-576 Servo Motor) tem as seguintes especificações:

$$\begin{aligned} V_i(\text{max}) &= 30 \text{ volts} \\ I_a(\text{max}) &= 2 \text{ amperes} \\ R_a &= 3 \text{ ohms} \\ L_a &= 6 \text{ milihenries} \\ K_t &= 50 \times 10^{-3} \text{ Newton-metro/ampere} \\ T(\text{nominal}) &= 0,1 \text{ Newton-metro} \\ J_m &= 40 \times 10^{-6} \text{ kilograma-metro}^2 \\ B_m &= 40 \times 10^{-6} \text{ kilograma-metro}^2/\text{s} \\ \omega(\text{nominal}) &= 300 \text{ radianos/s.} \end{aligned}$$

Considerando que a inércia da carga e atrito referenciados ao eixo do motor são:

$$\begin{aligned} J_L &= 60 \times 10^{-6} \text{ kilograma-metro}^2 \\ B_L &= 65 \times 10^{-6} \text{ kilograma-metro}^2/\text{s,} \end{aligned}$$

então, a função de transferência tensão-velocidade, da Eq. (18), torna-se

$$G_1(s) = \frac{17,9}{2,1 \cdot 10^{-4} s^2 + 0,107s + 1}.$$

Se a indutância de armadura é desprezada, a função de transferência, da Eq. (19), torna-se

$$G_V(s) = \frac{17,9}{0,107s + 1}.$$

Se um degrau de 10 volts é aplicado ao motor em $t = 0$, a velocidade angular como uma função do tempo é facilmente calculada

$$\Omega(s) = \frac{10}{s} \cdot \frac{17,9}{0,107s + 1} = \frac{179}{s(0,107s + 1)}.$$

A transformada inversa de Laplace da última equação leva a

$$\omega(t) = 179(1 - e^{-9,35t}),$$

e quando $t \rightarrow \infty$ (regime permanente), $\omega \rightarrow 179$ rd/s. Como exercício construa o gráfico da resposta do sistema. Obtenha os valores da resposta, em porcentagem do valor final, para $t = k\tau$, k inteiro indo de zero a cinco.

A função de transferência torque-velocidade, da Eq. (20), torna-se

$$G_2(s) = \frac{-1074(2 \cdot 10^{-3}s + 1)}{2,1 \cdot 10^{-4}s^2 + 0,107s + 1}.$$

Se a indutância de armadura é desprezada, a função de transferência, da Eq. (21), torna-se

$$G_L(s) = \frac{-1074}{0,107s + 1}.$$

Então, se um degrau de 0,05 Nm é aplicado ao motor em $t = 0$, a velocidade angular como uma função do tempo é

$$\Omega(s) = \frac{0,05}{s} \cdot \frac{-1074}{0,107s + 1} = \frac{-53,7}{s(0,107s + 1)}.$$

A transformada inversa de Laplace da última equação leva a

$$\omega(t) = -53,7(1 - e^{-9,35t}).$$

No regime permanente a queda de velocidade é 53,7 rd/s com um acréscimo no torque de carga de 0,05 Nm.

Dissipação de potência

Nesta seção vamos tratar o motor C.C. como um dispositivo de conversão de energia em que a energia elétrica na entrada é convertida em energia mecânica na saída. A Fig. 3 mostra o fluxo real de potência através de tal dispositivo de conversão de energia. Uma fração da potência elétrica de entrada é convertida imediatamente em calor nos enrolamentos da armadura. O resto da potência elétrica é convertido em potência mecânica, parte do qual é perdido através do atrito e arrasto, o que sobra é a potência rotacional mecânica disponível no eixo.

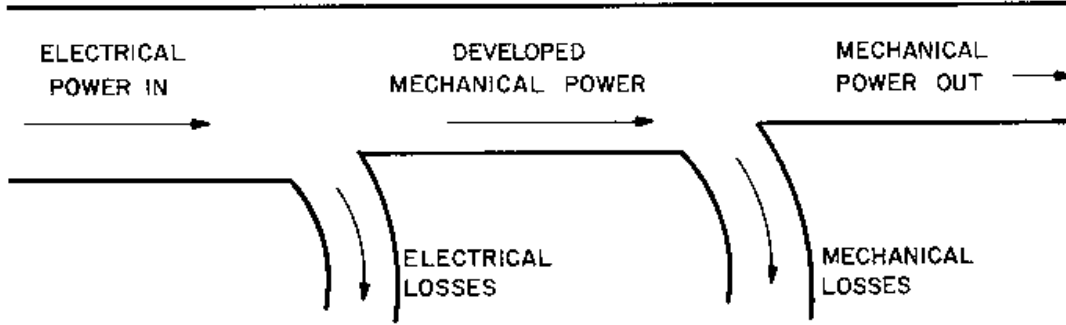


Fig. 3 - Fluxo de potência em um motor C.C.

A potência elétrica total de entrada é o produto instantâneo da tensão aplicada e a corrente de armadura. Assim, a potência total instantânea de entrada é

$$p_i(t) = v_i(t)i_a(t). \quad (22)$$

Combinando as Eqs. (1) e (4), obtém-se a equação da tensão do circuito de armadura que relaciona a tensão aplicada à corrente de armadura.

$$v_i(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + K_e \omega(t). \quad (23)$$

A substituição de Eq. (23) na Eq. (22) resulta na expressão para a potência de entrada total em termos da corrente de armadura e da velocidade angular do eixo.

$$p_i(t) = R_a i_a^2(t) + L_a i_a(t) \frac{di_a(t)}{dt} + K_e i_a(t) \omega(t). \quad (24)$$

A corrente de armadura pode ser escrita em termos dos parâmetros mecânicos do motor e dos torques no eixo, combinando as Eqs. (5) e (8)

$$i_a(t) = \frac{1}{K_t} \left[T_f(t) + T_L(t) + J \frac{d\omega(t)}{dt} + B\omega(t) \right], \quad (25)$$

que quando substituída na Eq. (24) resulta na seguinte expressão para a potência:

$$p_i(t) = R_a i_a^2(t) + \frac{K_e B \omega^2(t)}{K_t} + \frac{K_e \omega(t) T_f(t)}{K_t} + \frac{K_e \omega(t) T_L(t)}{K_t} + \frac{K_e J \omega(t) \frac{d\omega(t)}{dt}}{K_t} + L_a i_a(t) \frac{di_a(t)}{dt}. \quad (26)$$

O primeiro termo do lado direito da Eq. (26) representa a perda $i^2 R$ no enrolamento de armadura em consequência do fluxo de corrente de armadura. O segundo termo representa a perda de potência devido ao atrito viscoso, e o terceiro termo representa a perda de potência devido a todos os torques restantes de atrito. Juntos, o segundo e terceiro termos representam as perdas mecânicas do motor. O quarto termo representa a saída mecânica real do motor. Os últimos dois termos representam fluxos de potência instantâneos para dentro ou para fora dos dispositivos de armazenamento da energia (inércia e indutância). Note que o último termo é a derivada com relação ao tempo da quantidade $(L_a i_a^2)/2$ e, como tal, pode ser interpretado como a taxa de variação da energia armazenada na indutância L_a . Da mesma forma, o penúltimo termo é interpretado como a taxa de variação da energia cinética. Se, no começo e no fim de qualquer período de tempo finito, a energia armazenada nos elementos inercial e indutivo é a mesma, não há troca líquida na energia armazenada e nenhuma potência líquida é dissipada. Assim, a potência média dissipada pelos elementos inercial e indutivo é zero.

A eficiência do motor, como um conversor de energia, pode ser calculada pela relação entre a potência mecânica de saída e a potência total média de entrada.

$$\text{Eficiência (potência)} = \frac{T_L}{\frac{R_a i_a^2 K_t}{K_e \omega} + B \omega + T_f + T_L} \times 100\%, \quad (27)$$

onde todos os parâmetros são considerados constantes.

A eficiência da conversão de potência mecânica pode ser obtida pela relação entre a potência mecânica de saída e a potência mecânica desenvolvida.

$$\text{Eficiência na conversão mecânica} = \frac{T_L}{B \omega + T_f + T_L} \times 100\%. \quad (28)$$

Tomando um exemplo, um pequeno motor C.C. a ímã-permanente opera com uma tensão de armadura de 16 volts e consome 2 A de corrente de armadura ao fornecer um torque de 0,08 Nm a uma carga que gira com uma velocidade de 200 rd/s. Todo o atrito é suposto ser viscoso fazendo $T_f = 0$ e $B = 100 \times 10^{-6}$ Nm. A resistência de armadura é 3 ohms. A seguir calcular-se-á a eficiência total de potência e a eficiência na conversão de potência mecânica para tal motor.

$$\begin{aligned}
 \text{Eficiência (potência)} &= \frac{0,08}{\frac{3 \cdot 2^2}{200} + 100 \cdot 10^{-6} \cdot 200 + 0,08} \cdot 100\% \\
 &= \frac{0,08}{0,06 + 0,02 + 0,08} \cdot 100\% \\
 &= 50\%.
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Eficiência na conversão mecânica} &= \frac{0,08}{100 \cdot 10^{-6} \cdot 200 + 0,08} \cdot 100\% \\
 &= \frac{0,08}{0,1} \cdot 100\% \\
 &= 80\%.
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

Observe que a parcela principal da potência perdida é devido à resistência da armadura.

Modelo térmico para um motor C.C.

Como mostra o exemplo acima, a metade da potência consumida por um pequeno motor operando em regime permanente é dissipada como calor no próprio motor. Em sistemas de movimento incremental (como é o caso de motores de passo), a maior parte do torque gerado é usado para acelerar e frear a carga. Este modo de operação resulta numa potência de saída muito pequena, e, conseqüentemente, a maior parte da potência de entrada é convertida em calor no próprio motor. Então, é importante compreender e modelar esta dissipação de calor, ao menos a grosso modo, para prever acréscimos da temperatura dentro do motor. A fim de se obter um modelo térmico simples para o motor, representamos o motor por dois elementos apenas – a *armadura*, com seu eixo associado e rolamentos como elemento rolante, e o *estator* (veja Fig. 4).

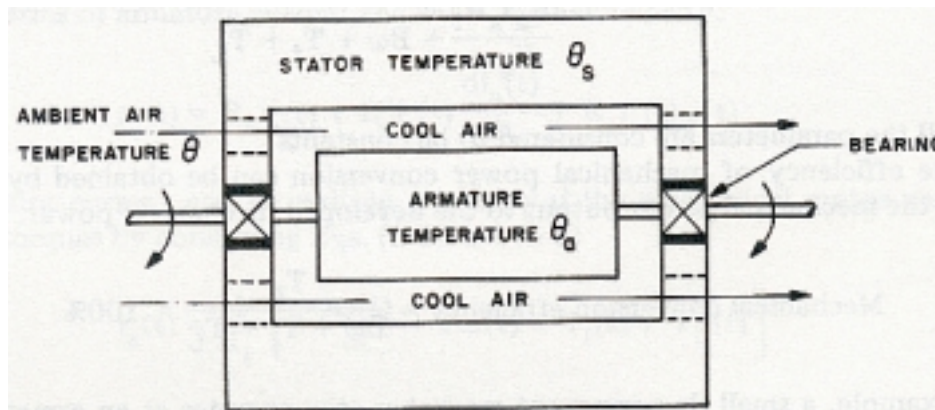


Fig. 4 - Elementos térmicos de um motor de C.C.

O modelo térmico que será desenvolvido é baseado em um modelo simplificado para o motor C.C. mostrado na Fig. 4 e supõe-se o seguinte:

1. As distribuições de temperatura na armadura, no estator, e ambiente ao redor são uniformes.
2. A transferência de calor entre superfícies em temperaturas diferentes é proporcional ao diferencial da temperatura entre as superfícies.
3. A potência total dissipada e convertida em calor (primeiro, segundo e terceiro termos do lado direito da Eq. (26)) é toda dissipada na armadura e nos rolamentos, e é chamada de p_L .

A quantidade de potência (na forma de calor) que é transmitida da armadura ao estator é dada por

$$p_{as}(t) = G_{as} [\theta_a(t) - \theta_s(t)], \quad (31)$$

onde $\theta_a(t)$ e $\theta_s(t)$ são as temperaturas da armadura e do estator, respectivamente, relativamente ao ambiente e G_{as} é o condutância térmica entre o armadura e o estator. A potência térmica transferida entre o estator e o ar ambiente ao redor do estator é

$$p_{so}(t) = G_{so} \theta_s(t) \quad (32)$$

e a potência térmica transferida da armadura ao ambiente é

$$p_{ao}(t) = G_{ao} \theta_a(t). \quad (33)$$

Em ambas, armadura e estator, a variação da temperatura com relação ao tempo é proporcional à potência térmica total dissipada no corpo, assim,

$$K_a \frac{d\theta_a(t)}{dt} = p_L(t) - p_{as}(t) - p_{so}(t), \quad (34)$$

onde o lado direito representa a potência térmica líquida total dissipada na armadura. Para o estator, a equação do calor é

$$K_s \frac{d\theta_s(t)}{dt} = p_{as}(t) - p_{so}(t). \quad (35)$$

Substituindo as Eqs. (31), (32) e (33) nas Eqs. (34) e (35) obtém-se duas equações diferenciais com duas incógnitas com a quantidade de entrada sendo a potência total dissipada na armadura, p_L .

$$K_a \frac{d\theta_a(t)}{dt} = p_L(t) - G_{as} [\theta_a(t) - \theta_s(t)] - G_{ao} \theta_a(t), \quad (36)$$

$$K_s \frac{d\theta_s(t)}{dt} = G_{as} [\theta_a(t) - \theta_s(t)] - G_{so} \theta_s(t). \quad (37)$$

As funções de transferência que relacionam a temperatura da armadura ou a temperatura do estator à potência de entrada total dissipada, p_L , podem ser obtidas pelas transformadas de Laplace das Eqs. (36) e (37) e, então, resolvendo para θ_a ou θ_s como funções de p_L . Estas funções de transferência são dadas a seguir:

$$\frac{\Theta_a(s)}{P_L(s)} = \frac{sK_s + G_{as} + G_{so}}{K_a K_s s^2 + [K_s(G_{as} + G_{ao}) + K_a(G_{as} + G_{so})]s + G_{as}G_{ao} + G_{as}G_{so} + G_{ao}G_{so}} \quad (38)$$

e

$$\frac{\Theta_s(s)}{P_L(s)} = \frac{G_{as}}{K_a K_s s^2 + [K_s(G_{as} + G_{ao}) + K_a(G_{as} + G_{so})]s + G_{as}G_{ao} + G_{as}G_{so} + G_{ao}G_{so}}. \quad (39)$$

Se a potência dissipada na armadura for conhecida em função do tempo e se as constantes térmicas da máquina forem conhecidas é possível, através das equações (38) e (39), calcular teoricamente as temperaturas da armadura e do estator como funções do tempo. Tais cálculos tornam-se inviáveis se a dissipação de potência for uma função temporal demasiadamente complicada. É necessário esforço moderado para calcular θ_a e θ_s para o caso em que a potência dissipada é constante. Diversas alternativas ao cálculo completo da história temporal para as temperaturas da armadura e do estator podem vir a serem úteis onde às respostas aproximadas são suficientes para a análise de engenharia.

Simplificação em regime estacionário

Se a potência dissipada na armadura atinge um valor constante, as temperaturas da armadura e do estator aproximarão eventualmente um valor de regime estacionário, e este valor de regime estacionário, como uma função do valor de potência dissipada, é facilmente calculado supondo que a potência aplicada é uma função degrau e invocando o teorema do valor final no domínio de Laplace. Assim, a temperatura de regime estacionário da armadura em função da potência dissipada constante é

$$\theta_a(t \rightarrow \infty) = p_L \frac{G_{as} + G_{so}}{G_{as}G_{ao} + G_{as}G_{so} + G_{ao}G_{so}} \quad (40)$$

e a equação para a temperatura de regime estacionário do estator é

$$\theta_s(t \rightarrow \infty) = p_L \frac{G_{as}}{G_{as}G_{ao} + G_{as}G_{so} + G_{ao}G_{so}}, \quad (41)$$

onde p_L é o valor do degrau de potência aplicado.

Refrigeração a ar forçado

Em conseqüência da refrigeração através de ar forçado extra e do acoplamento térmico reduzido entre a armadura e o estator, algumas máquinas tem $G_{as} \ll G_{ao}$ tal que a potência térmica transferida ao estator pode ser desprezada. Então, a Eq. (36) reduz-se a

$$K_a \frac{d\theta_a(t)}{dt} = p_L(t) - G_{ao} \theta_a(t) \quad (42)$$

e a função de transferência entre a temperatura da armadura e a potência dissipada torna-se

$$\frac{\Theta_a(s)}{P_L(s)} = \frac{1/G_{ao}}{\frac{K_a}{G_{ao}}s + 1}, \quad (43)$$

com $1/G_{ao}$ sendo a *resistência térmica* e K_a/G_{ao} a *constante de tempo térmica*. Note que como o fluxo de ar é aumentado, a condutância térmica, G_{ao} , aumentará também. Isto resulta em uma resistência térmica reduzida e em uma constante de tempo térmica mais longa. Ambos estes efeitos são favoráveis para a operação do motor.

Método de análise paralelo

Ambas as funções de transferência entre as temperaturas da armadura e do estator e a potência dissipada contêm os mesmos polinômios em s no denominador [veja Eqs. (38) e (39)]. Este polinômio quadrático pode ser fatorado em seus dois fatores separados e a função de transferência pode ser escrita numa expansão em fração parcial da seguinte forma:

$$\frac{\Theta_a(s)}{P_L(s)} = \frac{sK_s + G_{as} + G_{so}}{C(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)} = \frac{R_1}{s\tau_1 + 1} + \frac{R_2}{s\tau_2 + 1}, \quad (44)$$

onde C é a constante $G_{as}G_{ao} + G_{as}G_{so} + G_{ao}G_{so}$. Assim, para uma dada dissipação de potência p_L , a temperatura de armadura pode ser calculada como a soma de dois componentes de temperatura correspondentes aos termos do lado direito da Eq. (44). Esta forma de função de transferência pode conduzir a cálculos simplificados, supondo conhecidos R_1 , R_2 , τ_1 e τ_2 . pode ser computado. Nos casos onde uma constante de tempo difere da outra em pelo menos uma ordem de valor, os cálculos podem ser simplificados aproximando um termo como uma constante em comparação com o outro. Um modelo paralelo similar pode ser criado para a função de transferência da temperatura do estator.

Sumário

Ambos os motores C.C., a ímã-permanente e com enrolamento de campo com corrente de campo constante, têm funções de transferência similares entre a velocidade e tensão aplicada à armadura, e entre a velocidade e as mudanças do torque de carga. Cada função de transferência é mostrada com sendo de segunda ordem e tendo o mesmo denominador, embora os numeradores não sejam similares. Se, entretanto, a indutância da armadura é desprezível, ambas funções de transferência reduzem-se a expressões de primeira ordem que diferem entre si apenas por uma constante.

As perdas de energia em pequenas máquinas C.C. são elevadas sendo comuns eficiências de potência da ordem de 50%. Toda a energia perdida é transformada em calor e pode causar aquecimento excessivo particularmente na armadura. As funções de transferência entre as temperaturas do estator ou da armadura e a potência dissipada na armadura têm os denominadores de segunda ordem, embora sob certas circunstâncias, por exemplo, elevada refrigeração a ar forçado, as expressões podem ser simplificadas para expressões de primeira ordem.

As características de transferência derivadas nesta apostila são todas determinísticas, lineares, e invariantes no tempo, e requerem o conhecimento dos parâmetros da máquina. As técnicas para medir tais parâmetros são descritas na Ref. [4], capítulo 9.

Referências

1. *DC Motors, Speed Controls, Servo Systems*, 3rd ed., Engineering Handbook, Electro-Craft Corporation, 1975.
2. A. E. Fitzgerald, C. Kingsley and A. Kusko, *Electric Machinery*, 3rd ed., McGrawHill Book Company, New York, 1971.
3. L. W. Matsch, *Electromagnetic and Electromechanical Machines*, Intext Educational Publisher, College Division of Intext, San Francisco, California, 1972.
4. B. C. Kuo and J. Tal (eds.) *DC Motors and Control Systems*, SLR Publishing Co., Champaign, Illinois, 1978.